# 第1讲:解答题解三角形综合性问题(1)

1. 记$\Delta ABC$的内角$A$,$B$,$C$的对边分别为$a$,$b$,$c$,分别以$a$,$b$,$c$为边长的三个正三角形的面积依次为$S_1$,$S_2$,$S_3$. 已知$S_1-S_2+S_3=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\sin B=\frac{1}{3}$.

(1) 求$\Delta ABC$的面积;

(2) 若$\sin A\sin C=\frac{\sqrt{2}}{3}$,求$b$.

$S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ $S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$ $S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$

$S_1+S_3-S_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$a^2+c^2-b^2=2$.

$\because \sin B=\frac{1}{3}$, $\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ $\cos B>0$.

$ac=\frac{3}{2\sqrt{2}}$ $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2\sqrt{2}}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}}{8}$

(2) 由正弦定理得 $(2R)^2=\frac{ac}{\sin A\sin C}=\frac{\frac{3}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{3}}=\frac{9}{4}$

$2R=\frac{3}{2}=\frac{b}{\sin B}$.

$\therefore b=\frac{3}{2}\cdot\sin B=\frac{1}{2}$

2. 在三角形$ABC$中,$A=60^\circ$,$D$点在$AC$边上,$AD=1$,$DC=\sqrt{3}$.

(1)$BD=\sqrt{7}$,求$\Delta ABD$的面积;

(2) 若$E$点在$AB$边上,$AD=AE$,$\angle DBC=30^\circ$,求$\sin\angle EDB$.

(1) $\cos A=\frac{1}{2}=\frac{1+AB^2-7}{2AB}$

$AB=AB^2-6$.

$AB^2-AB-6=0$.

$(AB-3)(AB+2)=0$.

$AB=3$.

$S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}\times 1\times 3\times\sin 60^\circ=\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}\sqrt{3}$

$\Delta BDE$ 中

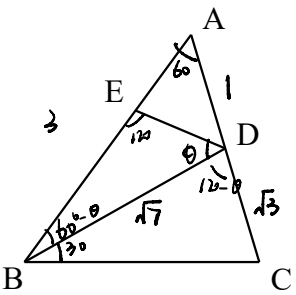
(2) 由正弦定理

$\frac{BD}{\sin\angle BED}=\frac{DE}{\sin\angle DBE}$ $\frac{BD}{\sin 120}=\frac{1}{\sin(60-\theta)}$

$\frac{BD}{\sin(60+\theta)}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\theta}$

$\sin(2\theta+60)=\frac{1}{2}$.

$\theta=15^\circ$.




3. 在$\Delta ABC$中,角$A$,$B$,$C$所对的边分别为$a$,$b$,$c$,且满足$a\cos C-\sqrt{3}a\sin C=b-2c$.

(1) 求角$A$;

(2) 已知$AB=2$,$AC=6$,$M$点为$BC$的中点,$N$点在线段$AC$上且$|\overrightarrow{AN}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{AC}|$,点$P$为$AM$与$BN$的交点,求$\angle MPN$的余弦值.

$\sin A\cos C-\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin B-2\sin C+\cos A\sin C$

$\because \sin(A+C)=\sin(\pi-B)=\sin B$

$\because \sin C\neq 0$. $\therefore \sqrt{3}\sin A+\cos A=2$.

$\sin(A+\frac{\pi}{6})=1$.

$0<A<\pi$.

$A=\frac{\pi}{3}$

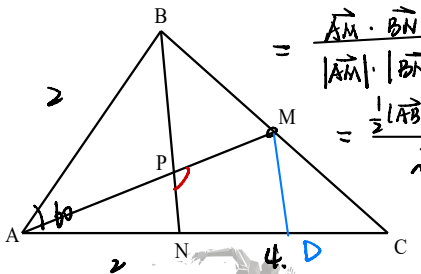
(2) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{AM}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{AM}=\sqrt{13}$.

$|\overrightarrow{BN}|=2$. $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\cos\angle MPN=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{AM}|\cdot|\overrightarrow{BN}|}=\frac{\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})}{\sqrt{13}\times 2}=\frac{\sqrt{13}}{13}$



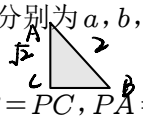



微信公众号【学习帮e2】免费分享,课程及纸质资料咨询微信:ywtk9966

4. 已知$\Delta ABC$中，角$A$，$B$，$C$所对的边分别为$a$，$b$，$c$，且$\sin C=\sqrt{2}\sin B$，$C=2A$，$c=2$.

(1) 求证：$\Delta ABC$是等腰直角三角形；

(2) 已知点$P$在$\Delta ABC$的内部，且$PB=PC$，$PA=AC$，求$\cos\angle PAB$.




$C=\sqrt{2}$ $b=2$. $A+B+C=180°$.

$b=\sqrt{2}$. $\sin C=2\sin A\cos A$ $c=2a\cos A=2$.

猜根.

$a\cos A=\frac{b-a^2}{4\sqrt{2}}\times a=1$. $a^3-ba+4\sqrt{2}=0$. 代入$a=\sqrt{2}$成立.

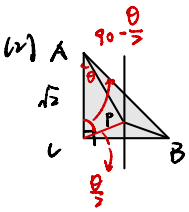
$a^3-\sqrt{2}a^2+\sqrt{2}a^2-ba+4\sqrt{2}=0$.

$a^2(a-\sqrt{2})+(\sqrt{2}a-2)(a-2\sqrt{2})=0$.

$(a-\sqrt{2})(a^2+\sqrt{2}a-4)=0$.

$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$

三次方程




$AP=\sqrt{2}$ $\sqrt{2}^2-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$PB^2=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})^2$

5. $\Delta ABC$的内角$A$，$B$，$C$的对边分别为$a$，$b$，$c$，已知$a+c=2b\cos A$.

(1) 证明：$B=2A$；

(2) 设$D$为$BC$边上的中点，点$E$在$AB$边上，满足$DE\perp AB$，且$b=\sqrt{3}a$，四边形$ACDE$的面积为$\frac{15\sqrt{3}}{8}$，求线段$CE$的长.

6. 已知$\Delta ABC$的内角$A$，$B$，$C$的对边分别为$a$，$b$，$c$，若$\Delta ABC$的面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1$且$c>b$.

(1) 求角$A$的大小；

(2) 设$M$为$BC$的中点，且$AM=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求$a$的长度.





微信公众号【学习帮e2】免费分享，课程及纸质资料咨询微信：ywtk9966

7. 在$\Delta ABC$中，角$A$，$B$，$C$所对的边分别为$a$，$b$，$c$.

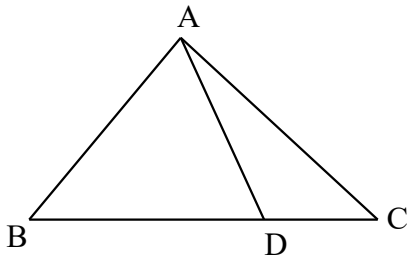
(1) 若$c(1-2\cos B)=2b\cos C$，且$\sin A=\frac{1}{5}$，求$\sin C$；

(2) 若$b=3$，$D$是边$AC$上一点，$AD=2DC$，$\frac{\sin\angle CBD}{\sin\angle ABD}=\frac{1}{2}$，且$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$. 求$BD$的长.

8. 如图，在$\Delta ABC$中，$AB=2$，$3a\cos B-b\cos C=c\cos B$，点$D$在线段$BC$上.

(Ⅰ) 若$\angle ADC=\frac{3\pi}{4}$，求$AD$的长；

(Ⅱ) 若$BD=2DC$，$\Delta ACD$的面积为$\frac{4}{3}\sqrt{2}$，求$\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}$的值.




9. 在①$c-\frac{\sqrt{3}}{3}a\sin B=b\cos A$，②$2S=\sqrt{3}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$($S$为$\Delta ABC$的面积)两个条件中任选一个补充在下面的横线上，并加以解答.

在$\Delta ABC$中，角$A$、$B$、$C$的对边分别为$a$，$b$，$c$，且 _____.

(1) 求角$B$；

(2) 若角$B$的平分线与$AC$交于点$D$，且$b=6$，$BD=3\sqrt{3}$，求$a+c$.



微信公众号【学习帮e2】免费分享，课程及纸质资料咨询微信：ywtk9966

10. 记$\triangle ABC$的内角$A,B,C$所对的边分别是$a,b,c$. 已知$\dfrac{(c\cos B+b\cos C)^2+bc}{b^2+c^2}=1$.

(1)求角$A$的大小

(2)若点$D$在边$BC$上，$AD$平分$\angle BAC$，$AD=2$，且$b=2c$，求$a$.





微信公众号【学习帮e2】免费分享，课程及纸质资料咨询微信：ywtk9966

## 课堂总结





微信公众号【学习帮e2】免费分享，课程及纸质资料咨询微信：ywtk9966

## 作业

1. 从① $2\sin A+\sqrt{3}\cos(A+C)=2\sin B\cos C$；② $\frac{b}{a+c}+\frac{a}{b+c}=1$；③ $a^2-c^2=4(a-4)$ 这三个条件．中任选一个，补充在下面问题中，问题：已知点 $O$ 为锐角 $\Delta ABC$ 的外接圆圆心，满足 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=8$，_____，$\Delta ABC$ 的面积为 $5\sqrt{3}$，

(1) 求 $C$ 的大小；

(2) 求 $\Delta OAB$ 的面积．



微信公众号【学习帮e2】免费分享，课程及纸质资料咨询微信：ywtk9966